



زاویه در زمان

حسین کریمی

همگی با ساعت آشنا هستیم. ساعت‌های مچی، رومیزی، دیواری و یا ساعت‌هایی که در سطح شهر می‌بینیم، به دو دسته تقسیم می‌شوند: ساعت‌های دیجیتالی و ساعت‌های عقربه‌دار. در این نوشته سراغ ساعت‌های عقربه‌دار می‌رویم. الان ساعت چند است؟

۰۴:۱۰ یا ۱۱:۳۲ یا ۰۱:۵۰ یا ۰۲:۲۸ یا ...

و در هر دقیقه $\frac{360}{60}$ یا همان ۶ درجه حرکت می‌کند. پس اگر بخواهیم اندازه زاویه دو عقربه را در لحظه ۰۴:۱۰ به دست آوریم، می‌گوییم:

(I) در لحظه ۰۴:۰۰ زاویه بین دو عقربه $4 \times 30^\circ$ یعنی 120° درجه است.

(II) بعد از گذشت ۱۰ دقیقه، عقربه ساعت‌شمار به اندازه $\frac{10}{60}$ سی درجه، یعنی ۵ درجه دیگر نیز حرکت کرده است.

(III) عقربه دقیقه‌شمار $10 \times 6^\circ$ ، یعنی ۶۰ درجه به جلو حرکت کرده است. پس زاویه بین دو عقربه در لحظه ۰۴:۱۰ برابر است با:

$$(120^\circ + 5^\circ) - 60^\circ = 65^\circ$$

برای به دست آوردن رابطه کلی، به منظور محاسبه اندازه زاویه بین دو عقربه ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در لحظه $h:m$ که در آن h نشان‌دهنده ساعت و m نشان‌دهنده دقیقه است، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

(I) در لحظه $h:00$ زاویه بین دو عقربه برابر است با $30 \cdot h$ درجه.

(II) بعد از گذشت m دقیقه، عقربه ساعت‌شمار به اندازه $\frac{m}{60}$ سی درجه، یعنی $\frac{m}{2}$ درجه دیگر حرکت می‌کند.

(III) عقربه دقیقه‌شمار بعد از m دقیقه، درجه حرکت می‌کند.

پس زاویه بین دو عقربه در لحظه $h:m$ برابر است با:

$$(30 \cdot h + \frac{m}{2}) - 6m = 30 \cdot h - \frac{11}{2}m$$

حال طبق همین رابطه، مجدداً اندازه زاویه بین دو عقربه را در



بین دو عقربه ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار زاویه‌ای تشکیل شده است. اندازه این زاویه چقدر است؟

می‌دانیم یک دور کامل چرخش هر عقربه ۳۶۰ درجه است و عقربه ساعت‌شمار در هر ساعت، $\frac{1}{12}$ دور کامل، یعنی ۳۰ درجه حرکت می‌کند و عقربه دقیقه‌شمار در هر ساعت یک دور کامل

در اینجا این سؤال پیش می‌آید که: آیا لحظه $۶:۲۵\frac{۵}{۱۱}$ ، یعنی بین $۶:۲۵:۲۷$ تا $۶:۲۵:۲۸$ ، اندازه زاویه بین دو عقربه واقعاً ۴۰ درجه است؟ باید بگوییم که در بعضی از ساعاتها این اتفاق می‌افتد و در بعضی نه. پس به اجبار ساعاتهای عقربه‌دار را نیز به دو دسته تقسیم می‌کنیم:

(الف) ساعاتهای باتری‌دار (کوارتز)؛
 (ب) ساعاتهای کوکی (چه به صورت دستی و چه به صورت اتوماتیک).

فرق این دو نوع ساعت صرفاً در داشتن یا نداشتن باتری نیست، بلکه مهم‌ترین تفاوت آن‌ها در حرکت عقربه‌هاست. در ساعاتهای کوارتز، حرکت عقربه‌ها پیوسته نیست و به صورت جهشی است. یعنی در هر ثانیه، عقربه دقیقه‌شمار به اندازه $\frac{۱}{۱۰}$ و عقربه ساعت‌شمار به اندازه $\frac{۱}{۱۲۰}$ درجه پرش دارد. پس اگر ساعت باتری‌داری قبل از $۶:۲۶$ از کار بیفتد، بین دو عقربه زاویه ۴۰ درجه نخواهیم داشت. مثلاً یا در $۶:۲۵:۲۷$ از کار می‌افتد؛ یا در $۶:۲۵:۲۸$ ، و نه بین آن دو، در واقع لحظه $۶:۲۵\frac{۵}{۱۱}$ برای ساعاتهای کوارتز بی‌معنی است.

اما در ساعاتهای کوکی، چون حرکت عقربه‌ها پیوسته است، پس لحظه $۶:۲۵\frac{۵}{۱۱}$ کاملاً قابل قبول است و بین دو عقربه زاویه ۴۰ درجه به وجود خواهد آمد.

تذکر: معمولاً در مسائلی که مربوط به زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار مطرح می‌شوند، حرکت عقربه‌ها را پیوسته در نظر می‌گیرند؛ مگر آنکه خلافش را یادآوری کرده باشند.

چند مسئله

- بین ساعاتهای ۲ و ۳، در چه لحظه‌ای دو عقربه ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار بر هم عمودند؟
- بین ساعاتهای ۴ و ۵، در چه لحظه‌ای عقربه دقیقه‌شمار روی عقربه ساعت‌شمار قرار می‌گیرد؟
- در یک شبانه‌روز چند بار عقربه دقیقه‌شمار روی عقربه ساعت‌شمار قرار می‌گیرد؟
- اگر ساعت از نوع کوارتز باشد و عقربه ثانیه‌شمار هم داشته باشد و هر سه عقربه حول یک مرکز بچرخند، در یک شبانه‌روز چند بار عقربه ثانیه‌شمار نیم‌ساز زاویه بین دو عقربه دیگر خواهد بود؟
- اگر ساعت مسئله ۴ از نوع کوکی باشد، مسئله ۴ چند جواب خواهد داشت؟

لحظه $۴:۱۰$ به دست می‌آوریم:

$$۱۰ \times \frac{۱۱}{۲} - (۳ \times ۴) = \text{اندازه زاویه بین دو عقربه}$$

$$= ۶۵ - ۱۲ = ۵۳$$

مثال ۱. زاویه بین دو عقربه در لحظه $۱۱:۳۲$ چقدر است؟

$$۳۲ \times \frac{۱۱}{۲} - (۳ \times ۱۱) = \text{اندازه زاویه بین دو عقربه}$$

$$= ۱۷۶ - ۳۳ = ۱۴۳$$

تذکر: اگر اندازه زاویه بین دو عقربه منفی باشد، آن را مثبت در نظر می‌گیریم و اگر بیش از ۱۸۰ باشد، آن را از ۳۶۰ کم می‌کنیم.

مثال ۲. زاویه بین دو عقربه در لحظه $۲:۲۸$ چند درجه است؟

$$۲۸ \times \frac{۱۱}{۲} - (۳ \times ۲) = \text{اندازه زاویه بین دو عقربه}$$

$$= ۱۵۴ - ۶ = ۱۴۸$$

مثال ۳. اندازه زاویه بین دو عقربه در لحظه $۱۰:۰۶$ چند درجه است؟

$$۶ \times \frac{۱۱}{۲} - (۳ \times ۱۰) = \text{اندازه زاویه بین دو عقربه}$$

$$= ۳۳ - ۳۰ = ۳$$

$$\rightarrow ۳۶۰ - ۳ = ۳۵۷$$

مثال ۴. زاویه بین دو عقربه در لحظه $۱:۰۵$ را به دست آورید.

$$۵ \times \frac{۱۱}{۲} - (۳ \times ۱) = \text{اندازه زاویه بین دو عقربه}$$

$$= ۲۷.۵ - ۳ = ۲۴.۵$$

$$\rightarrow ۱۱۵ \rightarrow ۲۴۵ \rightarrow -۲۴۵$$

مثال ۵. در چه لحظه‌هایی بین ساعت ۶ و ۷ زاویه بین دو عقربه برابر ۴۰ خواهد بود؟

حل: فرض کنیم در لحظه $m:۶$ زاویه بین دو عقربه ۴۰ باشد:

$$۴۰ = (۳ \times h) - \left(\frac{۱۱}{۲} \times m\right) \Rightarrow$$

$$۴۰ = ۱۸ - \frac{۱۱}{۲}m \Rightarrow m = ۲۵\frac{۵}{۱۱}$$

$$۴۰ = (۳ \times ۶) - \left(\frac{۱۱}{۲} \times m\right) \Rightarrow$$

$$-۴۰ = ۱۸ - \frac{۱۱}{۲}m \Rightarrow m = ۴۰$$

در مثال ۵ مشاهده می‌کنیم که بین ساعت ۶ تا ۷، دو بار عقربه‌ها با هم زاویه ۴۰ درجه می‌سازند: در لحظه‌های $۶:۴۰$ و $۶:۲۵\frac{۵}{۱۱}$